Программа спецкурса

Специальные функции математической физики

I. Основы теории

§1. Обобщенное уравнение гипергеометрического типа

1. Приведение некоторых дифференциальных уравнений, встречающихся в задачах квантовой механики и математической физики, к уравнениям вида

$$u''(x) + \frac{\tilde{\tau}(x)}{\sigma(x)}u' + \frac{\tilde{\sigma}(x)}{\sigma^2(x)}u = 0 \tag{1}$$

($\tilde{\tau}(x)$ — полином не выше первой степени, $\sigma(x)$ и $\tilde{\sigma}(x)$ — полиномы не выше второй степени).

2. Приведение *обобщенного уравнения гипергеометрического типа* (1) к уравнению гипергеометрического типа

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0 \tag{2}$$

($\tau(x)$ — полином не выше первой степени, λ — постоянная). Выделенный случай.

3. *Уравнение Римана с тремя особыми точками* и его связь с обобщенным уравнением гипергеометрического типа (1).

§2. Дифференциальное уравнение гипергеометрического типа

1. Основное свойство решений уравнения гипергеометрического типа.
2. Формула Родрига для полиномиальных решений и их производных.

§3. Интегральное представление для функций гипергеометрического типа

1. Обобщение формулы Родрига.
2. Единое интегральное представление для функций гипергеометрического типа и их производных.

II. Уравнение Бесселя

§4. Функции Бесселя

1. Приведение уравнения Бесселя к уравнению гипергеометрического типа.

2. Выбор контуров для интегральных представлений.
3. Фунция Бесселя 1-го рода $J_\nu(z)$. Получение степенного ряда. Интегралы Эйлера 1-го и 2-го рода $B(u, v)$ и $\Gamma(z)$, формула Стирлинга. Случай $\nu = \dfrac{1}{2}$ и полуцелых значений ν. Случай $\nu \gg z$.
4. Функции Ханкеля 1-го и 2-го рода $H_\nu^{(1)}(z)$ и $H_\nu^{(2)}(z)$. Их асимптотика. Функция Бесселя 2-го рода $Y_\nu(z)$. Асимптотика функций $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$.
5. Интегральные представления Пуассона для функций Бесселя как частный случай интегральных представлений для функций гипергеометрического типа.
6. Модифицированные функции Бесселя $K_\nu(z)$, $I_\nu(z)$.
7. Преобразование Ломмеля (см. исключение для §1, п. 2).

III. Классификация уравнений гипергеометрического типа

§5. Приведение уравнений гипергеометрического типа к каноническому виду.

1. Сохранение типа уравнения при линейной замене независимой переменной.
2. Гипергеометрическое уравнение. Гипергеометрическая функция Гаусса $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$.
3. Уравнение для вырожденной гипергеометрической функции $F(\alpha, \gamma, z)$.
4. Функция Эрмита $H_\nu(z)$ и функция параболического цилиндра $D_\nu(z)$.
5. Построение по одному частному решению уравнения гипергеометрического типа других частных решений с помощью преобразования исходного уравнения в уравнение гипергеометрического типа.

IV. Классические ортогональные полиномы

§6. Основные свойства полиномов гипергеометрического типа

1. Полиномы Якоби, Лагерра и Эрмита.
2. Производящие функции. Теорема сложения для сферических гармоник.
3. Полиномы $y_n(x)$ и их производные $y_n^{(m)}(x)$.
4. Свойство ортогональности полиномов $y_n(x)$ и их производных. Вычисление квадратов нормы d_n^2 и коэффициентов при старших степенях a_n, b_n:

$$\int_a^b y_n^{(k)}(x) y_m^{(k)}(x) \rho_k(x) dx = d_{kn}^2 \delta_{mn}, \qquad \sigma(x)\rho(x)x^\ell|_{a,b} = 0 \quad (\ell = 0, 1, ...),$$

$$d_{kn}^2 = \frac{1}{\mu_{kn}} d_{k+1,n}^2, \quad d_n^2 = \frac{d_{nn}^2}{\prod_{k=0}^{n-1} \mu_{kn}}, \quad d_{nn}^2 = (n! a_n)^2 \int_a^b \sigma^n(x) \rho(x) dx.$$

§7. Некоторые общие свойства ортогональных полиномов

1. Разложение произвольного полинома по ортогональным полиномам $p_n(x)$.
2. Единственность системы полиномов при заданном весе. Определитель для $p_n(x)$. Полиномы Чебышева 1-го рода $T_n(x)$ как наименее уклоняющиеся от нуля.
3. Рекуррентные соотношения $xp_n(x) = \alpha_n p_{n+1}(x) + \beta_n p_n(x) + \gamma_n p_{n-1}(x)$. Способ вычисления коэффициентов $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ для классических ортогональных полиномов.
4. Формула Дарбу–Кристоффеля.
5. Свойства нулей.
6. Свойства четности полиномов, вытекающие из четности весовой функции.
7. Квадратурные формулы Гаусса.

§8. Качественное поведение полиномов Якоби, Лагерра и Эрмита

§9. Задачи на собственные значения, приводящие к классическим ортогональным полиномам для состояний дискретного спектра

1. Постановка задачи. Теорема.
2. Линейный гармонический осциллятор.
3. Водородоподобный атом (уравнение Шредингера).
4. Уравнение Дирака для водородоподобного атома.

§10. Классические ортогональные полиномы как собственные функции некоторых задач на собственные значения

1. Свойство *полноты* для классических ортогональных полиномов.
2. Основная теорема (доказательство).
3. Теорема разложения. Теорема равносходимости.

§11. Сферические гармоники. Теорема сложения

1. Решение уравнения Лапласа в сферических координатах.
2. Свойства сферических гармоник.
3. Интегральное представление.
4. Связь однородных гармонических полиномов и сферических гармоник.
5. Обобщенные сферические гармоники.
6. Теорема сложения.

§12. Квазиклассическое приближение

V. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной

§13. Разностное уравнение гипергеометрического типа на равномерных сетках

1. Разностная схема 2-го порядка точности для дифференциального уравнения гипергеометрического типа на равномерной и неравномерной сетке.
2. Полиномы Хана, Мейкснера, Кравчука и Шарлье.

§14. Разностное уравнение гипергеометрического типа на неравномерных сетках

1. Нахождение класса неравномерных сеток, сохраняющих тип уравнения. Определение понятия *разностное уравнение гипергеометрического типа*. Предельный переход от q–сетки к линейной и квадратичной.
2. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной на неравномерных сетках.
3. Квадратичная сетка.
4. q–сетка.
5. Классификация q–полиномов.

Спецкурс. Профессор **А.Ф. Никифоров**

Специальные функции в математической и теоретической физике

Многие задачи теоретической и математической физики приводят к уравнениям вида

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(x)}{\sigma(x)}u' + \frac{\tilde{\sigma}(x)}{\sigma^2(x)}u = 0, \tag{1}$$

где $\sigma(x)$ и $\tilde{\sigma}(x)$ — полиномы не выше 2–ой степени, $\tilde{\tau}(x)$ — полином не выше 1–ой степени. Уравнение (1) может быть получено из известного в аналитической теории дифференциальных уравнений *уравнения Римана* с тремя регулярными особыми точками. Для уравнений (1) нетрудно найти класс преобразований $u = \phi(x)y$, приводящий их с помощью специального выбора функции $\phi(x)$ к уравнениям того же вида. При этом полином $\sigma(x)$ остается неизменным и оказывается выделенным асимптотическое поведение решений $u(x)$. В результате для функции $y = y(x)$ возникает уравнение

$$y'' + \frac{\bar{\tau}(x)}{\sigma(x)}y' + \frac{\bar{\sigma}(x)}{\sigma^2(x)}y = 0,$$

в котором полином $\bar{\sigma}(x)$ можно выбрать так, чтобы он делился без остатка на $\sigma(x)$. Это позволяет вместо уравнения (1) рассматривать более простое уравнение

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0 \tag{2}$$

(λ — некоторая постоянная, $\sigma(x)$ и $\tau(x)$ — полиномы не выше 2–ой и 1–ой степени). Уравнение (2) легко решается. Сначала для него строится класс наиболее простых решений — классические ортогональные полиномы, определяемые формулой Родрига

$$y = y_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)}\frac{d^n}{dx^n}[\sigma^n(x)\rho(x)],$$

где функция $\rho(x)$ удовлетворяет уравнению $(\sigma\rho)' = \tau\rho$, а коэффициенты уравнения (2) для полинома $y_n(x)$ связаны соотношением $\lambda + n\tau' + \frac{1}{2}n(n-1)\sigma'' = 0$.

Затем формула Родрига обобщается и из нее естественно возникает *класс интегральных представлений* для решений уравнения (2) при *любых* $\lambda, \tau(x), \sigma(x)$ и, тем самым, для решений уравнения (1), который позволяет описать функции Бесселя, гипергеометрические и вырожденные гипергеометрические функции, сферические гармоники и ряд других специальных функций с единой точки зрения, а также решать многие задачи квантовой механики.

Уравнение вида (2) естественно называть *уравнением гипергеометрического типа*, так как оно приводит к гипергеометрическим функциям, а уравнение вида (1) — *обобщенным уравнением гипергеометрического типа*.

В рамках найденного подхода построена также теория *классических ортогональных полиномов дискретной переменной* как частных решений *разностного уравнения гипергеометрического типа*, являющегося аналогом дифференциального уравнения (2) на равномерных и неравномерных сетках определенного вида. Рассматриваются полиномы Чебышева дискретной переменной, полиномы Хана, Мейкснера, Кравчука, Шарлье, полиномы Рака и дуальные полиномы Хана, q–полиномы, полиномы Аски–Вильсона, а также коэффициенты Клебша–Гордана и Рака, которые давно нашли приложение в классической и квантовой механике, теории вероятностей и вычислительной математике.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Ф. Никифоров, В.Б. Уваров, *Специальные функции математической физики*, Наука, М., 1978, 1984 (2-ое издание).

Arnold F. Nikiforov, Vasilii B. Uvarov, *Special functions of mathematical physics*, translated from the Russian by Ralph P. Boas, Birkhauser, Basel–Boston, 1988.

A.F. Nikiforov, V.B. Ouvarov, *Fonctions speciales de la physique mathematique.* 1)Edition Mir, Moscow, 1983; 2)Office des Publications Universitaires, 1, Place Centrale de Ben Aknoun (Alger), 1984.

kkkkk 2. A.F. Nikiforov, S.K. Suslov, V.B. Uvarov, *Classical orthogonal polynomials of a discrete variable*, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1991.

3. Д. Мэтьюз, Р. Уокер, *Математические методы в физике*, М., 1964.

4. F.W. Olwer, *Asymptotics and special functions*, Academic Press, New York, 1974.

5. Nico M. Temme, *Special functions*, John Wiley and Sons, New York, 1996.

6. G.E. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special functions*, Cambridge University Press, 1999.

7. S.Yu. Slavyanov, W. Lay, *Special functions. A unified theory based on singularities*, Oxford University Press, New York, 2000.

8. Н.Я. Виленкин, *Специальные функции и теория представлений групп*, М., 1965.

9. И.М. Гельфанд, Р.А. Минлос, З.Я. Шапиро, *Представление группы вращений и группы Лоренца*, Москва, Физматгиз, 1958.

10. С.К. Годунов, Т.Ю. Михайлова, *Представления группы вращений и сферические функции*, Новосибирск, 1998.

11. М. Абрамовиц, И. Стиган (ред.), *Справочник по специальным функциям*, М., Наука, 1979.

В качестве **Введения** к предлагаемому курсу — см. брошюру А.Ф. Никифоров, С.К. Суслов, *Классические ортогональные полиномы*, изд. "Знание — новое в жизни, науке и технике", серия "Математика и кибернетика", Москва, **12**, 1985.

Программа спецкурса

Специальные функции математической физики

I. Основы теории

1. Обобщенное уравнение гипергеометрического типа
2. Дифференциальное уравнение гипергеометрического типа. Приведение к каноническому виду
3. Интегральное представление для функций гипергеометрического типа. Функции Бесселя

II. Классические ортогональные полиномы

4. Основные свойства полиномов гипергеометрического типа
5. Некоторые общие свойства ортогональных полиномов
6. Качественное поведение полиномов Якоби, Лагерра и Эрмита
7. Задачи на собственные значения, приводящие к классическим ортогональным полиномам для состояний дискретного спектра
8. Классические ортогональные полиномы как собственные функции некоторых за дач на собственные значения
9. Сферические гармоники. Теорема сложения
10. Квазиклассическое приближение

III. Классические ортогональные полиномы дискретной пере менной

11. Разностное уравнение гипергеометрического типа на равномерных сетках
12. Разностное уравнение гипергеометрического типа на неравномерных сетках